

Übungen zur FP-Einführungsvorlesung

Statistische Methoden

Blockkurs, August 2012

Prof. Dr. K. Jakobs, Dr. K. Lohwasser, Dr. C. Weiser

Aufgabenblatt 1

Besprechung: Dienstag 28. August 2012

1. Mittelwert, Varianz und Kovarianz

(a) Zeigen Sie, dass

- die Summe der linearen Abweichungen einer Menge von Zahlen X_i von ihrem arithmetischen Mittelwert gleich null ist.
- die Summe der Quadrate der Abweichungen einer Menge von Zahlen X_i von einer beliebigen Zahl A nur dann minimal ist, wenn $A = \bar{X}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die Berechnung der Varianz bzw. Kovarianz gilt:

- $\sigma^2(x) := E\{(x - \mu)^2\} = E(x^2) - (E(x))^2$
- $\text{cov}(x, y) := E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} = E(xy) - \mu_x \mu_y$

wobei μ , μ_x und μ_y die entsprechenden Erwartungswerte sind.

2. Wahrscheinlichkeitsdichte

Gegeben sei eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} f(x) &= b \quad \text{für} \quad -a \leq x < 0 \\ f(x) &= c \quad \text{für} \quad 0 \leq x < a \\ f(x) &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie c als Funktion von a und b , sowie den Erwartungswert $E(x)$, den Median $x_{0,5}$ und die Varianz $\sigma^2(x)$ der Verteilung.

3. Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte und Randverteilungen

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y \quad \text{für} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ f(x, y) &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass x im Intervall zwischen 0.5 und 1 und gleichzeitig y im Intervall zwischen 0.4 und 0.6 liegt?
- Wie lauten die Randverteilungen der Zufallsvariablen x und y ?

4. Korrelationskoeffizient

Gegeben sei eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$. Zeigen Sie, dass

- (a) der Korrelationskoeffizient $\rho(x, y)$ gleich null ist, wenn x und y unabhängige Zufallsvariablen sind.
- (b) der Korrelationskoeffizient $\rho(x, y)$ betragsmäßig kleiner als 1 ist.
- (c) $|\rho(x, y)| = 1$ genau dann gilt, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen x und y besteht.

Hinweis zu (b) und (c): führen Sie reduzierte Variablen $u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$, $v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$ ein und betrachten Sie die Varianz der Summe bzw. der Differenz von u und v .