

# Übungen zur FP-Einführungsvorlesung

## Statistische Methoden

Blockkurs, August 2011

Prof. Dr. K. Jakobs, Dr. R. Bernhard

### Aufgabenblatt 1

Montag, 22. August 2011

#### 1. Mittelwert, Varianz und Kovarianz

(a) Zeigen Sie, dass

- die Summe der linearen Abweichungen einer Menge von Zahlen  $X_i$  von ihrem arithmetischen Mittelwert gleich null ist.
- die Summe der Quadrate der Abweichungen einer Menge von Zahlen  $X_i$  von einer beliebigen Zahl  $A$  nur dann minimal ist, wenn  $A = \bar{X}$  ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die Berechnung der Varianz bzw. Kovarianz gilt:

- $\sigma^2(x) := E\{(x - \mu)^2\} = E(x^2) - (E(x))^2$
- $\text{cov}(x, y) := E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} = E(xy) - \mu_x \mu_y$

wobei  $\mu$ ,  $\mu_x$  und  $\mu_y$  die entsprechenden Erwartungswerte sind.

#### 2. Wahrscheinlichkeitsdichte

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $x$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} f(x) &= b & \text{für } -a \leq x < 0 \\ f(x) &= c & \text{für } 0 \leq x < a \\ f(x) &= 0 & \text{sonst} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie  $c$  als Funktion von  $a$  und  $b$ , sowie den Erwartungswert  $E(x)$ , den Median  $x_{0.5}$  und die Varianz  $\sigma^2(x)$  der Verteilung.

#### 3. Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte und Randverteilungen

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y & \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ f(x, y) &= 0 & \text{sonst} \end{aligned}$$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  im Intervall zwischen 0.5 und 1 und gleichzeitig  $y$  im Intervall zwischen 0.4 und 0.6 liegt?
- Wie lauten die Randverteilungen der Zufallsvariablen  $x$  und  $y$ ?

#### 4. Korrelationskoeffizient

Gegeben sei eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x, y)$ . Zeigen Sie, dass

- (a) der Korrelationskoeffizient  $\rho(x, y)$  gleich null ist, wenn  $x$  und  $y$  unabhängige Zufallsvariablen sind.
- (b) der Korrelationskoeffizient  $\rho(x, y)$  betragsmäßig kleiner als 1 ist.
- (c)  $|\rho(x, y)| = 1$  genau dann gilt, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  besteht.

Hinweis zu (b) und (c): führen Sie reduzierte Variablen  $u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$ ,  $v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$  ein und betrachten Sie die Varianz der Summe bzw. der Differenz von  $u$  und  $v$ .